

Über die Größe des Elektronenradius

Von H. SALECKER

Aus dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforsch. 10 a, 349—360 [1955]; eingegangen am 28. März 1955)

In den letzten Jahren sind bei Streuversuchen erhöhter Genauigkeit von Elektronen, Positronen und μ -Mesonen an Elektronen Abweichungen von den nach der Quantenelektrodynamik berechneten Wirkungsquerschnitten festgestellt worden. Diese lassen sich nur zu einem kleineren Teil durch den Einfluß der höheren Näherungen mit und ohne Ausstrahlung erklären. Der Hauptanteil scheint vielmehr durch Abweichungen von der Elektrodynamik, also durch den Einfluß der Kopplungen mit den übrigen Elementarteilchen, zustande zu kommen. In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die Streuquerschnitte für die Streuung von Elektronen, Positronen und μ -Mesonen an freien Elektronen nach der verallgemeinerten Feldtheorie bei beliebiger Strukturfunktion berechnet. Der anschließende Vergleich mit dem heute vorhandenen, noch nicht überall genügend genauen Erfahrungsmaterial zeigt, daß auf Abweichungen von der Elektrodynamik im Gebiet $r \approx 1$ bis $2 \cdot 10^{-12}$ cm geschlossen werden kann, ohne daß die Strukturfunktion irgendwie spezialisiert werden muß. Dabei ist der Beitrag der Strahlungskorrekturen schon vorher abgezogen worden. Dieser „Elektronenradius“ fällt ungefähr vier- bis sechsmal größer aus als der klassische Elektronenradius; doch steht seine Größe mit Beobachtungen anderer Art, wie z. B. der Lambschen Verschiebung und dem zusätzlichen magnetischen Moment des Elektrons, nicht im Widerspruch. Verschiedene rein theoretische Erwägungen über die Gültigkeitsgrenzen der Quantenelektrodynamik haben schon früher einen Elektronenradius (in dem hier betrachteten Sinne) von dieser Größe vermuten lassen.

Die Frage nach der Ausdehnung der Elementarteilchen, insbesondere nach dem Radius des Elektrons, ist bereits sehr früh erhoben worden. Schon in der Theorie von Lorentz, also beim allerersten Versuch einer theoretischen Erfassung des Elektrons, tauchte das Problem seiner (zunächst rein räumlich gedachten) Struktur auf. Dort ergab sich bekanntlich deshalb die Notwendigkeit, dem Elektron einen endlichen Radius zuzuschreiben, weil die Fortsetzung des Coulomb-Feldes bis in den Mittelpunkt des Elektrons die Energie des elektrischen Feldes und damit auch die Masse unendlich groß werden ließ. Um den experimentell gefundenen endlichen Wert für die Masse des Elektrons zu erhalten, mußte man bei einem Radius das Coulomb-Feld abbrechen, der von der Größenordnung $r_{kl} = e^2/(mc^2) = 2,82 \cdot 10^{-13}$ cm ausfiel und der unter der Bezeichnung „klassischer Elektronenradius“ bekannt geworden ist. Unter dem Radius des Elektrons wurde dabei diejenige Entfernung vom Zentrum des ruhenden Teilchens verstanden, bei der eine merkliche Abweichung vom Coulomb-Feld auftrat. Auch wir wollen diese Definition ganz allgemein übernehmen, ohne daß damit irgend etwas über die Natur der Abweichung vom Coulomb-Feld ausgesagt wird. (Bekanntlich ruft die Vakuumpolarisation bereits im Rahmen der Quantenelektrodynamik

eine kleine Abweichung vom Coulomb-Feld hervor. Diese soll hier aber nicht als Abweichung angesehen, sondern im Coulomb-Feld eingeschlossen werden.) Im Gegensatz zu früheren Arbeiten wollen wir jedoch versuchen, direkt aus geeigneten Experimenten etwas über die Größe des so definierten Elektronenradius auszusagen.

Die Quantenelektrodynamik ist in den letzten Jahren durch eine Reihe von Experimenten sogar in höheren Näherungen gut bestätigt worden. Das ist bekanntlich durch die Messungen der Lambschen Verschiebung bei der Feinstruktur des Wasserstoffs und des schweren Wasserstoffs, des zusätzlichen magnetischen Moments des Elektrons und etwa der Feinstruktur im Grundzustand des Positroniums geschehen. Diese Effekte hängen jedoch wesentlich nur vom Bereich niedriger Energie ab, d. h. hauptsächlich vom Feldverlauf in der weiteren Umgebung des Teilchens. Wir können also nicht erwarten, hier über die Verhältnisse in der unmittelbaren Nachbarschaft des Elektrons Aufschluß zu erhalten. Dazu sind vielmehr Experimente mit großen Energie-Impuls-Übertragungen, also z. B. Streuexperimente bei genügend hohen Energien der einfallenden Teilchen, nötig. In den letzten Jahren ist es dabei besonders deutlich geworden, daß die verschiedenen Elementarteilchen alle miteinander in Wechselwirkung stehen. Das



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

bedeutet also, daß die Quantenelektrodynamik nur einen Ausschnitt aus der Gesamtheit der Elementarteilchen beschreibt und daß der von uns als Abweichung von der Quantenelektrodynamik definierte Elektronenradius die Entfernung vom Zentrum des Elektrons angibt, bei der die Wechselwirkung mit den nicht durch die Quantenelektrodynamik beschriebenen Elementarteilchen merklich wird. Die vielfach untersuchte Streuung von Elektronen an Kernen ist für unsere Zwecke nicht besonders geeignet. Sie ist nur in einem schmalen Energiebereich, in dem die Impulsänderungen noch nicht sehr groß sein können, von unzureichend beherrschten Störeffekten wie Ladungsverteilung im Kern, Abschirmung usw. frei. Außerdem ist eine genügend genaue Rechnung hier sehr problematisch. Günstiger steht es dagegen mit der Streuung von Elektronen und Positronen an freien Elektronen.

Die Elektron-Elektron-Streuung ist nach der Quantenelektrodynamik in niedrigster Näherung der Störungsrechnung von Møller¹, die Positron-Elektron-Streuung in derselben Weise von Bhabha² berechnet worden. Zu beiden gibt es eine Reihe von Messungen besonders aus neuerer Zeit^{3, 4}. Dabei haben sich im allgemeinen die Formeln von Møller und Bhabha innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen von etwa 10% bestätigt. Die genauesten Experimente, die gegenwärtig bei der Elektron-Elektron-Streuung vorhanden sind, zeigen jedoch, soweit die Einfallenergie einige MeV übersteigt, für starke Energieübertragungen, d. h. für große Streuwinkel, deutliche Abweichungen von der Möllerschen Formel im Sinne einer Reduktion des Wirkungsquerschnittes; doch sind die Meßfehler noch nicht klein genug, so

daß der Unterschied nur bei der Arbeit von Barber, Becker und Chu³ außerhalb der Fehlergrenzen bleibt. Hier ist bei einem Streuwinkel von 90° und einer Einfallenergie von 6,1 MeV ein um etwa 8% kleinerer Wirkungsquerschnitt als der Möllersche festgestellt worden. Die experimentellen Fehler sollen kleiner als 2% sein. Eine Verminderung für große Energieübertragungen bzw. große Streuwinkel gegenüber dem Streuquerschnitt bei punktförmigen Teilchen ist gerade zu erwarten, wenn das Coulomb-Feld nahe am Teilchenmittelpunkt irgendwie abgebrochen wird, was man qualitativ unmittelbar erkennt.

Um einen quantitativen Vergleich zu machen, sollen hier die Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Elektronen, Positronen und μ -Mesonen an Elektronen nach der verallgemeinerten Feldtheorie^{5, 6, 7} berechnet werden. Die verallgemeinerte Feldtheorie enthält bekanntlich eine unbestimmt bleibende Strukturfunktion. Diese Funktion beschreibt z.B. auch die Abänderung des Feldes einer Punktladung. Durch sie wird also die Entfernung vom Zentrum des Elektrons angegeben, bei der eine merkliche Abweichung vom Coulomb-Feld auftritt und die wir als Radius des Elektrons bezeichnet haben. Die Form der Strukturfunktion wird durch eine Reihe allgemeiner Bedingungen eingeengt, wie sie bereits von Bopp und anderen ausführlich untersucht worden sind. Innerhalb dieser Bedingungen ist es in den von uns betrachteten Energiebereichen, wie Vergleichsrechnungen gezeigt haben⁸, nicht wesentlich, welche spezielle Form die Strukturfunktion besitzt. Dagegen hängt das Ergebnis stark davon ab, bei welchem Abstand vom Zentrum des Elektrons die Strukturfunktion das Coulomb-Potential merklich

¹ C. Møller, Ann. Physik (5) **14**, 531 [1932].

² H. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc., Lond. A **154**, 195 [1936].

³ E. J. Williams u. F. R. Terroux, Proc. Roy. Soc., Lond. A **126**, 289 [1930]; F. C. Champion, Proc. Roy. Soc., Lond. A **137**, 688 [1932]; P. E. Shearin u. T. E. Pardue, Phys. Rev. **59**, 933 [1941]; M. Deutschmann, Z. Naturforschg. **2a**, 61 [1947]; G. Groetzinger, L. B. Leder, F. L. Ribe u. M. J. Berger, Phys. Rev. **79**, 454 [1950]; L. A. Page, Phys. Rev. **81**, 1062 [1951]; M. B. Scott, A. O. Hanson u. E. M. Lyman, Phys. Rev. **84**, 638 [1951]; W. C. Barber, G. E. Becker u. E. L. Chu, Phys. Rev. **89**, 950 [1953]; K. Ulmer, Z. Phys. **135**, 232 [1953]. A. Ashkin, L. A. Page u. W. M. Woodward, Phys. Rev. **94**, 357 [1954].

⁴ O. Ritter, C. Liesegang, H. Maier-Leibnitz, A. Papkow, K. Schmeiser u. W. Bothe, Z.

Naturforschg. **6a**, 243 [1951]; W. H. Barkas, R. W. Deutsch, F. C. Gilbert u. C. E. Violet, Phys. Rev. **86**, 59 [1952]; **88**, 1435 [1952]; A. Ashkin u. W. M. Woodward, Phys. Rev. **87**, 236 [1952]; G. R. Hoke, Phys. Rev. **87**, 285 [1952]; R. R. Roy u. L. Groven, Phil. Mag. **43**, 1291 [1952]; H. A. Howe u. K. R. MacKenzie, Phys. Rev. **90**, 678 [1953].

⁵ F. Bopp, Ann. Physik (5) **38**, 345 [1940]; (5) **42**, 573 [1942]; Z. Naturforschg. **1**, 53, 196, 236 [1946]; **3a**, 564 [1948]; Z. Phys. **125**, 615 [1949]; F. Bopp u. F. L. Bauer, Z. Naturforschg. **4a**, 611 [1949].

⁶ R. P. Feynman, Phys. Rev. **74**, 939, 1430 [1948]; **76**, 769 [1949].

⁷ B. Podolsky, Phys. Rev. **62**, 68 [1942]; B. Podolsky u. C. Kikuchi, Phys. Rev. **65**, 228 [1944]; **67**, 184 [1945].

⁸ H. Salecker, Habilitationsschrift, Stuttgart 1953.

abzuändern beginnt, d. h. welchen Elektronenradius (in dem von uns betrachteten Sinne) diese Strukturfunktion vorschreibt. Und zwar zeigt der Vergleich mit den Experimenten im einzelnen, daß eine Abänderung im Bereich der Compton-Wellenlänge r_c Ergebnisse liefert, die weniger als $1/100$ der gemessenen Werte ausmachen; ein Betrag, der weit außerhalb der Fehlergrenzen liegt. Die Compton-Wellenlänge ist also als „Elektronenradius“ auszuschließen. (Bekanntlich ist im Zusammenhang mit der Behandlung des Elektronenspins in der klassischen und in der Quantentheorie die Compton-Wellenlänge oft als Gültigkeitsgrenze der Theorie angesehen worden⁹.) Aber auch der klassische Elektronenradius r_{kl} bewirkt keine genügende Übereinstimmung mit den jüngsten Experimenten; der Unterschied gegenüber der unveränderten Quantenelektrodynamik ist nämlich bei dieser Größe der Modifikation in den untersuchten Energiebereichen unmeßbar klein. Eine Differenz von der beobachteten Größe verlangt vielmehr für den Radius r_0 des abgeänderten Gebietes einen ungefähren Wert $r_0 \approx 1$ bis $2 \cdot 10^{-12}$ cm. (Dabei ist der Beitrag der nächsthöheren Näherungen der Quantenelektrodynamik mit und ohne Ausstrahlung bereits abgezogen worden.) Alle übrigen zur Elektron-Elektron- und Positron-Elektron-Streuung bisher ausgeführten Experimente sind mit dieser Wahl der Größe der Abänderung gut zu vereinbaren. Auch bei der Streuung von μ -Mesonen der kosmischen Strahlung an freien Elektronen ist verschiedentlich über Abweichungen vom Verhalten der Quantenelektrodynamik berichtet worden. Diese lassen sich am besten durch dieselbe Größenordnung der Abänderung erklären, während die Compton-Wellenlänge auch hier viel zu große, der klassische Elektronenradius hingegen zu kleine (kaum meßbare) Abweichungen hervorruft. Anschließend wird erörtert, wie weit andere Ursachen grundsätzlicher Art eine solche Verminderung des Streuquerschnittes wie die beobachtete veranlassen könnten. Insbesondere wird der Einfluß der nächsthöheren Näherungen der Quantenelektrodynamik, also der Stoß mit Ausstrahlung eines Quants und die Korrektur durch virtuelle Quanten und Vakuumpolarisation besprochen. Zum Schluß werden die Gültigkeitsgrenzen der abgeleiteten Wirkungsquerschnitte kurz erwähnt und ein wegen der Größe

von r_0 möglich erscheinender kleiner Einfluß auf die Lambsche Verschiebung diskutiert, sowie unser „Elektronenradius“ mit den aus grundsätzlichen Überlegungen abgeleiteten Gültigkeitsgrenzen der Quantenelektrodynamik verglichen. Dabei ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den beiden Werten für r_0 .

I. Die Wirkungsquerschnitte nach der verallgemeinerten Theorie

Die verallgemeinerte Feldtheorie enthält bekanntlich eine zunächst noch unbestimmt bleibende Funktion, die entsprechend der ursprünglichen Idee erst zum Schluß durch den Vergleich mit der Erfahrung festgelegt werden soll. Für unsere Zwecke ist die Feynmansche Form⁶ der Theorie besonders passend, die die unbestimmte Funktion in der Gestalt $G(\lambda)$ einführt, wobei λ die Dimension einer Energie besitzt. Diese Funktion beschreibt z. B. auch die Abänderung des Feldes einer Punktladung; durch sie wird also die Entfernung vom Zentrum des Elektrons angegeben, bei der eine merkliche Abweichung vom Coulomb-Feld auftritt und die man, wie wir bereits erläutert haben, als Radius des Elektrons bezeichnen kann. An dieser Stelle gehen nicht-quantenelektrodynamische Kräfte in die Theorie ein, wie sie durch die experimentellen Erfahrungen über die Wechselwirkung mit den anderen Elementarteilchen wahrscheinlich gemacht werden. Der zu dieser Länge nach $\lambda = (\hbar c)/r$ gehörige Wert von λ spielt im Verlauf der Funktion $G(\lambda)$ eine ausgezeichnete Rolle. Die Größenordnung dieser λ , die für das Ausmaß der Abänderung von entscheidender Bedeutung sind, wollen wir die für $G(\lambda)$ wesentlichen λ , λ_w , nennen. $G(\lambda)$ muß sich jedenfalls so verhalten, daß λ_w hinreichend groß ausfällt, damit der Teilchenradius klein genug ist. Für größere Entfernungen vom Zentrum des ruhenden Teilchens muß ja die unveränderte Quantenelektrodynamik, also für das statische Feld das Coulomb-Feld, herauskommen (bis auf den Beitrag der Vakuumpolarisation zum statischen Feld). Für $G(\lambda)$ gilt deshalb die Beziehung $\int_0^\infty G(\lambda) d\lambda = 1$. Wir werden auf die Bedingungen, denen $G(\lambda)$ genügen muß, später noch einmal zurückkommen.

Die Rechnung läßt sich weitgehend quantitativ durchführen, ohne die Strukturfunktion $G(\lambda)$ zu spezialisieren. Das ist besonders angenehm, weil

⁹ Vgl. z. B. den Bericht von H. Hönl, Erg. exakt. Naturwiss. 26, 291 [1952].

die genaue Form von $G(\lambda)$ noch nicht bekannt ist. Gelegentlich werden wir aber auch zwei verschiedene Spezialisierungen verwenden. Die erste zeichnet sich dadurch aus, daß die für unsere Zwecke bedeutenden Züge der Theorie besonders klar hervortreten und daß man leicht zum allgemeinen Fall bzw. zu einer anderen Spezialisierung übergehen kann. Dazu wird $G(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ mit einem festen endlichen Wert λ_0 gesetzt. Die wesentlichen λ sind also hier auf einen einzigen Wert $\lambda_w = \lambda_0$ zusammengedrängt, dem ein bestimmter Radius r_0 entspricht. Diese Wahl von $G(\lambda)$, deren allgemeine Eigenschaften bereits früher von Bopp¹⁰ sowie Podolsky und Mitarb.⁷ untersucht worden sind, verursacht eine Yukawa-artige Modifikation des Coulomb-Potentials

$$V(r) = e \frac{1 - \exp[-(\lambda_0/\hbar c)r]}{r}.$$

Die nicht-quantenelektrodynamischen Wechselwirkungen werden hier durch ein einziges zusätzliches Feld in pauschaler Weise berücksichtigt. Diese Spezialisierung erscheint für eine erste Übersicht über die Größe der zu erwartenden Effekte besonders geeignet, wenn man bedenkt, daß die vorliegenden Experimente zu ungenau sind, um Einzelheiten über die Art der geforderten Abänderung der Quantenelektrodynamik erkennen zu lassen. Die Bopp-Podolsky-Spezialisierung leidet aber an der Schwierigkeit, daß bei genügend großen Energien Quanten mit der Ruhmasse λ_0 und negativer Energie ausgestrahlt werden können. Da die vorliegenden Experimente sich jedoch auf viel kleinere Energien als λ_0 beziehen, spielt diese Schwierigkeit in unserem Falle keine Rolle. Darüber hinaus haben Vergleichsrechnungen mit verschiedenen Spezialisierungen gezeigt, daß die Abweichungen voneinander in den hier wesentlichen Energiebereichen (≈ 6 MeV) im Vergleich zu der experimentellen Ungenauigkeit vernachlässigbar klein sind⁸.

Als zweite Spezialisierung benutzen wir die von Feynman⁶ eingeführte Form

$$G(\lambda) = 3 \frac{\lambda}{\lambda_0^2} \frac{1}{[1 + (\lambda/\lambda_0)^2]^{5/2}}.$$

Sie ist vom theoretischen Standpunkt aus befriedigender, weil sie von der Schwierigkeit der Quanten negativer Energie frei ist. Wir werden jedoch sehen, daß die Rechnung mit beiden Formen von $G(\lambda)$ ebenso wie die anderen gerade erwähnten Ver-

gleichsrechnungen innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen auf dieselben Ergebnisse führen.

Das Matricelement für die Streuung zweier geladener Teilchen vom Spin $\frac{1}{2}$ nach der unveränderten Quantenelektrodynamik hat bekanntlich die Form¹¹

$$H_M = \frac{4\pi\hbar^2 c^2 Z_1 Z_2 e^2}{k_\mu^2} (u_1^{0+} \alpha_\nu u_1) (u_2^{0+} \alpha_\nu u_2). \quad (1)$$

Dabei ist

$$k_\mu^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_4^2. \quad (1a)$$

Über wiederholt vorkommende griechische Indizes soll ganz allgemein mit der bei k_μ^2 getroffenen Vorzeichenfestsetzung von 1 bis 4 summiert werden ($A_\nu B_\nu = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 - A_4 B_4$). Auf Grund des Energie-Impuls-Erhaltungssatzes gilt

$$k_\mu = p_{\mu 1} - p_{\mu 0}, \quad (2)$$

wobei $p_{\mu 1}$ und $p_{\mu 0}$ den Energie-Impuls-Vierervektor des Teilchens 1 vor bzw. nach dem Stoß darstellen. Die übrigen Symbole haben die übliche Bedeutung. u_1^0 , u_1 bezeichnen die Diracschen Amplituden des Teilchens 1 vor bzw. nach dem Stoß, α_μ die Diracschen Matrizen ($\alpha_4 = 1$), e die Elementarladung, $Z_1 e$ die Ladung des Teilchens 1, $\hbar = h/2\pi$, \hbar Plancksches Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit. Entsprechendes gilt für das Teilchen 2 usw.

Sind die beiden Teilchen einander gleich (z.B. bei Elektronen), so ist infolge der Nichtunterscheidbarkeit der Teilchen 1 und 2 zu (1) noch ein Term hinzuzufügen (wegen des Pauli-Prinzips bei Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit negativem Vorzeichen), der aus (1) dadurch hervorgeht, daß die Endzustände der beiden Teilchen vertauscht werden.

Der Übergang von der gewöhnlichen Quantenelektrodynamik zu der verallgemeinerten Theorie läßt sich nach Feynman⁶ einfach dadurch vollziehen, daß die Ausbreitungsamplitude der Quanten mit dem Energie-Impuls-Vektor k_μ , die in der gewöhnlichen Theorie $1/k_\mu^2$ beträgt, durch die neue Ausbreitungsamplitude

$$F_+(k_\mu^2) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{k_\mu^2} - \frac{1}{k_\mu^2 + \lambda^2} \right] G(\lambda) d\lambda \\ = \frac{1}{k_\mu^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{k_\mu^2 + \lambda^2} \quad (3)$$

ersetzt wird. Hier bedeutet $G(\lambda)$ die bereits oben erwähnte, in der verallgemeinerten Feldtheorie enthaltene noch unbestimmte Strukturfunktion. Setzt man wie oben

$$G(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0), \quad (4)$$

¹⁰ F. Bopp, Ann. Physik (5) 38, 345 [1940].

¹¹ Vgl. etwa W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, 3. Aufl. Oxford 1954.

geht dann aber zur Grenze $\lambda_0 \rightarrow \infty$ über, so erhält man die gewöhnliche Quantenelektrodynamik zurück. Mit Hilfe von (3) ergibt sich für das Matrixelement in der verallgemeinerten Theorie

$$H_{VF} = 4\pi \hbar^2 c^2 Z_1 Z_2 e^2 \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{k_\mu^2} - \frac{1}{k_\mu^2 + \lambda^2} \right) G(\lambda) d\lambda (u_1^{0+} \alpha_\nu u_1) u_2^{0+} \alpha_\nu u_2). \quad (5)$$

Sind die beiden Teilchen 1 und 2 gleich, so hat man aus denselben Gründen wie bei (1) von (5) noch einen Term abzuziehen, der aus (5) durch Vertauschung der Endzustände der beiden Teilchen her-

$$d\Phi_{m_1, m_2}^{VF}(A) = \frac{\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_1 m_2 c^4} \frac{dA}{(\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)A^2} \cdot \left[\int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{2 m_1 m_2 c^4 (\gamma - 1)A + \lambda^2} \right]^2 \cdot \left\{ 2\gamma^2 - 2\gamma(\gamma - 1)A + (\gamma - 1)^2 A^2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1 m_2} (\gamma - 1)A \right\}. \quad (6)$$

A kann dabei Werte zwischen 0 und A_{\max} , das durch die Stoßgesetze gegeben ist, annehmen.

$$A_{\max} = \frac{2 m_1 m_2 (\gamma + 1)}{2 m_1 m_2 \gamma + m_1^2 + m_2^2},$$

$$\gamma = E_1^0 / mc^2 = 1 / \sqrt{1 - (v_1^0/c)^2}. \quad (7)$$

$$\cos \vartheta = \frac{m_1 (m_2 \gamma + m_1) + m_2 (m_1 \gamma + m_2) \cos \vartheta'}{\sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2 \gamma)^2 - m_1^2 m_2^2 + 2 m_1 m_2 (m_1 \gamma + m_2) (m_2 \gamma + m_1) \cos \vartheta' + m_1^2 m_2^2 (\gamma^2 - 1) \cos^2 \vartheta'}}. \quad (9)$$

Spezialisiert man $G(\lambda)$ auf $G(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ und führt nachher den Grenzübergang $\lambda_0 \rightarrow \infty$ aus, so erhält man, wie wir bereits besprochen haben, den

$$d\Phi_{m_1, m_2}^{Q.E.}(A) = \frac{\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_1 m_2 c^4} \frac{dA}{(\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)A^2} \cdot \left\{ 2\gamma^2 - 2\gamma(\gamma - 1)A + (\gamma - 1)^2 A^2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1 m_2} (\gamma - 1)A \right\}. \quad (10)$$

Die angegebenen Ausdrücke (6) und (10) gelten nur für $m_1 \neq m_2$, d. h. für die Streuung zweier verschiedener geladener Spinorteilchen wie z. B. μ -Meson und Elektron usw.

$$d\Phi_{e-e}^{VF}(A) = \frac{\pi e^4}{m^2 c^4 (\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)A^2 (1 - A)^2} \cdot \left\{ \left[\int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{m^2 c^4 (\gamma - 1)2A + \lambda^2} \right]^2 \cdot (1 - A)^2 [2\gamma^2 - 2(\gamma^2 - 1)A + (\gamma - 1)^2 A^2] \right. \\ + \int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{m^2 c^4 (\gamma - 1)2A + \lambda^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{m^2 c^4 (\gamma - 1)2(1 - A) + \lambda^2} 2\gamma(\gamma - 2)A(1 - A) \\ \left. + \left[\int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{m^2 c^4 (\gamma - 1)2(1 - A) + \lambda^2} \right]^2 A^2 [\gamma^2 - 2\gamma + 3 + 4(\gamma - 1)A + (\gamma - 1)^2 A^2] \right\}. \quad (11)$$

vorgeht. Das Matrixelement (5) gestattet es bereits, das allgemeine Verhalten der Abweichungen von der unveränderten Quantenelektrodynamik qualitativ zu überblicken. Wir werden nach Vollendung der Rechnung noch darauf zurückkommen.

Aus den Matrixelementen lassen sich die Wirkungsquerschnitte in der üblichen Weise berechnen. Man erhält nach längeren Umrechnungen für die Anzahl der Stöße zweier Spinorteilchen mit den Ladungen $Z_1 e$ und $Z_2 e$ sowie den Massen m_1 und m_2 ($m_1 \neq m_2$), bei der das Teilchen 1 eine Energie zwischen $Q = m_1 c^2 (\gamma - 1)A$ und $Q + dQ = m_1 c^2 (\gamma - 1)(A + dA)$ überträgt,

Statt der Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von A , dem Bruchteil der übertragenen kinetischen Energie, kann man auch den Streuwinkel ϑ (im Laboratoriumssystem) bzw. ϑ' (im Schwerpunktsystem) einführen:

$$A = \frac{m_1 m_2 (\gamma + 1)}{2 m_1 m_2 \gamma + m_1^2 + m_2^2} (1 - \cos \vartheta'), \quad (8)$$

Wirkungsquerschnitt der unveränderten Quantenelektrodynamik für die Streuung zweier verschiedener geladener Teilchen vom Spin $\frac{1}{2}$

Für $m_1 = m_2 = m$ müssen die Austauschglieder mitberücksichtigt werden. Nach längeren Umrechnungen erhält man ganz entsprechend für die Anzahl der Stöße, bei der der Bruchteil der übertragenen Energie zwischen A und $A + dA$ liegt,

An Stelle der Abhängigkeit vom Bruchteil A der übertragenen kinetischen Energie kann man auch hier den Streuwinkel ϑ (im Laboratoriumssystem) bzw. ϑ' (im Schwerpunktsystem) einführen, wobei man in den Ausdrücken (8) und (9) $m_1 = m_2 = m$

$$d\Phi_M(A) = \frac{2\pi e^4}{m^2 c^4 (\gamma^2 - 1) (\gamma - 1)} \frac{dA}{A^2 (1-A)^2} \cdot \{\gamma^2 - [3\gamma^2 - (\gamma - 1)^2]A + 3\gamma^2 A^2 - 2(\gamma - 1)^2 A^3 + (\gamma - 1)^2 A^4\}. \quad (12)$$

Nach (7) kann A hier alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen, d. h. die Energieübertragung kann vollständig sein. Da die beiden Teilchen (Elektronen) aber nach dem Stoß prinzipiell nicht unterscheidbar sind, kann man einen Stoß mit der Energieübertragung $A > 0,5$ nicht von dem entsprechenden Stoß mit der Energieübertragung $1-A$ unterscheiden. Man bezeichnet deshalb definitionsgemäß das Teilchen mit der größeren kinetischen Energie nach dem Stoß als Primärteilchen, so daß der Bruchteil A der übertragenen Energie höchstens 0,5 sein kann. Dasselbe gilt für den Wirkungsquerschnitt in der verallgemeinerten Theorie.

Der zuletzt abgeleitete Wirkungsquerschnitt bezieht sich nur auf die Streuung gleich geladener Teilchen aneinander; insbesondere beschreiben die Gl. (11) und (12) die Streuung von Elektronen an Elektronen, während die Positron-Elektron-Streuung durch diese Gleichungen nicht erfaßt wird. Die Positron-Elektron-Streuung erscheint aber vom Standpunkt unserer Theorie aus besonders inter-

essant, weil es hier möglich ist, die Teilchen mit Hilfe ihrer verschiedenen Ladung auch nach dem Stoß voneinander zu unterscheiden und auf diese Weise auch Ereignisse großer Energieübertragung zu untersuchen. Man kann jedoch aus den berechneten Ausdrücken die Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Positronen an Elektronen usw. leicht ableiten, wenn man entsprechend der Löschervorstellung im Matrixelement (1) bzw. (5) die Substitution

$$p_{\mu 1}^0 \rightarrow -p_{\mu 1}, \quad p_{\mu 1} \rightarrow -p_{\mu 1}^0 \quad (13)$$

vornimmt. Dann erhält man die Streuung eines Positrons vom Zustand $p_{\mu 1}^0$ in den Zustand $p_{\mu 1}$ und eines Elektrons vom Zustand $p_{\mu 2}^0$ in den Zustand $p_{\mu 2}$. Insgesamt ergibt sich nach längeren Umrechnungen ganz entsprechend wie bei der Elektron-Elektron-Streuung in der verallgemeinerten Feldtheorie für den Wirkungsquerschnitt der Positron-Elektron-Streuung, d. h. für die Anzahl der Stöße, bei der das Positron einen Energiebruchteil zwischen A und $A+dA$ überträgt,

$$d\Phi_{p-e}^{VF}(A) = \frac{\pi e^4}{m^2 c^4 (\gamma^2 - 1) (\gamma - 1)} \frac{dA}{A^2} \left\{ \left[\int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{m^2 c^4 (\gamma - 1) 2A + \lambda^2} \right]^2 [2\gamma^2 - 2(\gamma^2 - 1)A + (\gamma - 1)^2 A^2] \right. \\ - 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} A \int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{m^2 c^4 (\gamma - 1) 2A + \lambda^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{-2m^2 c^4 (\gamma + 1) + \lambda^2} [\gamma(\gamma + 2) - 2(\gamma^2 - 1)A + (\gamma - 1)^2 A^2] \\ \left. + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2 A^2 \left[\int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{-2m^2 c^4 (\gamma + 1) + \lambda^2} \right]^2 [\gamma^2 + 2\gamma + 3 - 2(\gamma - 1)^2 A + 2(\gamma - 1)^2 A^2] \right\}. \quad (14)$$

Jetzt kann A alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen. In derselben Weise wie bei der Elektron-Elektron-Streuung ist es auch möglich, statt A den Streuwinkel ϑ bzw. ϑ' einzuführen. Setzt man wieder $G(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$, so läßt sich durch den Grenzübergang $\lambda_0 \rightarrow \infty$ der bereits von Bhabha² berechnete Wirkungsquerschnitt für die Positron-

Elektron-Streuung in der unveränderten Quantenelektrodynamik ableiten. (Man hat also einfach die Integrale in (14) gleich eins zu setzen, um die Bhabhasche Formel daraus zu gewinnen.) Die Gl. (14) kann auch zur Beschreibung der Streuung der übrigen geladenen Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen an ihren Antiteilchen (z.B. positive an negativen μ -Mesonen)

nach der verallgemeinerten Feldtheorie, bzw. mit $G(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ und $\lambda_0 \rightarrow \infty$ nach der unveränderten Quantenelektrodynamik herangezogen werden. Der Bhabhasche Wirkungsquerschnitt wird dabei natürlich nur soweit brauchbare Ergebnisse liefern, als die eigentlichen Mesonfeldwirkungen vollständig vernachlässigt werden können.

II. Vergleich mit der Erfahrung

Bevor wir den Vergleich mit den heute vorliegenden Experimenten genauer durchführen, wollen wir zunächst qualitativ besprechen, welche Abweichungen von der unveränderten Quantenelektrodynamik zu erwarten sind und unter welchen Bedingungen sie auftreten können. Nach (3) ist in dem neuen Matricelement (5) gegenüber dem Matricelement (1) der unveränderten Quantenelektrodynamik nur der Ausbreitungsfaktor der virtuellen Quanten verallgemeinert worden. Im einzelnen hängt die Änderung von den Eigenschaften der noch unbestimmten Funktion $G(\lambda)$ ab. Diese Funktion ist jedoch keineswegs ganz willkürlich, wie wir bereits erwähnt haben, sondern muß einer Reihe von Bedingungen genügen. Insbesondere muß für Prozesse mit kleiner Energie-Impuls-Übertragung die unveränderte Quantenelektrodynamik herauskommen. Erst bei sehr großen Energie-Impuls-Übertragungen, also genügend starker Annäherung der stoßenden Teilchen, dürfen die Abweichungen gegenüber der Quantenelektrodynamik erheblich sein. Wie man aus (1a) und (2) ersieht, bedeutet $\sqrt{|k_\mu|^2}$ gerade die Größe der Energie-Impuls-Übertragung. Hat nun $\sqrt{|k_\mu|^2}$ eine solche Größe, daß es in die Größenordnung der für $G(\lambda)$ wesentlichen λ fällt, so bewirkt (3) eine Abnahme der Ereignisse mit diesen Energieübertragungen, wie unmittelbar aus $F_+(k_\mu^2)$ ersichtlich ist (z.B. im Schwerpunktsystem, in dem nur eine Impulsänderung auftritt $k_\mu^2 = c^2 \Delta p^2$); d. h. die Stöße mit großen Energie-Impuls-Übertragungen ($|k_\mu^2| \gtrsim \lambda_w^2$) kommen seltener vor als in der unveränderten Theorie, während solche mit kleiner Energie-Impuls-Übertragung ($|k_\mu^2| \ll \lambda_w^2$) nach der oben erwähnten Korrespondenzbeziehung zur Quantenelektrodynamik in praktisch derselben Häufigkeit vorhanden sind.

$G(\lambda)$ ist für $\lambda < \lambda_w$ sehr klein, so daß die Integration erst von $\lambda \approx \lambda_w$ ab wesentlich beiträgt; dann kann aber $|k_\mu^2|$ gegen λ^2 bei $|k_\mu^2| \ll \lambda_w^2$ vernachlässigt werden.

Wegen

$$\int_{\lambda_w}^{\infty} G(\lambda) d\lambda \approx \int_0^{\infty} G(\lambda) d\lambda = 1$$

erhält man daraus die Ausdrücke der unveränderten Quantenelektrodynamik.

Wir haben also einen steileren Abfall des Wirkungsquerschnittes als Funktion der übertragenen Energie zu erwarten als nach der unveränderten Theorie. Die Größenordnung der für $G(\lambda)$ wesentlichen λ ist dabei neben der Form von $G(\lambda)$ noch geeignet zu wählen. Die Form von $G(\lambda)$ wird durch eine Reihe von Bedingungen eingeschränkt, die im Zusammenhang mit grundsätzlichen theoretischen Erwägungen von Bopp⁵ und anderen^{6,7} ausführlich erörtert worden sind. Wir wollen deshalb an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen. Wichtiger als die Form von $G(\lambda)$, die in unseren Fällen nur die Einzelheiten der Wirkungsquerschnittkurven bestimmt, ist hier die Größenordnung der für $G(\lambda)$ wesentlichen λ oder anders ausgedrückt wegen

$$\lambda_w = \hbar c / r_0 \quad (15)$$

derjenige Abstand r_0 vom Ort des Teilchens, für den eine merkliche Abweichung vom Coulomb-Potential eintritt.

1. Vergleich mit den Experimenten über die Elektron-Elektron-Streuung

Wir wollen nun die vorliegenden Experimente zunächst zur Bestimmung der „Teilchenradien“ auswerten. Die genauesten Messungen wurden bisher bei der Elektron-Elektron-Streuung ausgeführt. Barber, Becker und Chu³ haben diese kürzlich bei 6,1 MeV kinetischer Energie der einfallenden Elektronen mit Hilfe einer Zählrohranlage in Koinzidenzschaltung untersucht und den Absolutwert des Wirkungsquerschnittes für $\vartheta' = 90^\circ$ und 109° gemessen. Dabei ergaben sich nach Anbringung der notwendigen Korrekturen Werte, die bei $\vartheta' = 109^\circ$ etwa 4,4% und bei $\vartheta' = 90^\circ$ etwa 8% niedriger sind, als die Möllersche Formel angibt. Für $\vartheta' = 109^\circ$ liegt die genannte Abweichung noch innerhalb der experimentellen Ungenauigkeit von $\pm 6\%$, während bei $\vartheta' = 90^\circ$ der experimentelle Fehler nur etwa $\pm 2\%$ beträgt. Allerdings wurden systematische Fehler nicht berücksichtigt, die ungünstigenfalls einen Teil der Diskrepanz erklären könnten. Doch erscheint diese Möglichkeit den Verfassern recht unwahrscheinlich. Auch andere Autoren haben verschiedentlich kleinere Werte bei der Streuung von Elektronen an Elektronen erhalten,

als der Møllerschen Formel entsprechen. So fanden Scott, Hanson und Lyman³ bei 15,7 MeV Werte, die für ϑ' zwischen 70° und 150° im Mittel um etwa 7% zu niedrig ausfallen. Leider ist die experimentelle Genauigkeit nicht groß genug, um diesen Unterschied als wirkliche Diskrepanz sicherzustellen. Auch Page³ ermittelte zwischen 0,6 und 1,7 MeV für $A=0,5$ Werte, die sämtlich kleiner sind als die Møllerschen. Doch ist hier der experimentelle Fehler so groß, daß der Unterschied vollständig innerhalb der Fehlergrenzen bleibt. Die übrigen Experimente sind zu ungenau, um über Abweichungen von dieser Größe etwas auszusagen.

Es fragt sich nun, welche Werte unsere Theorie in den genannten Fällen bei verschiedener Wahl des „Elektronenradius“ liefert, bzw. welche Radien auf Grund dieser Experimente bestimmt ausgeschlossen werden können. Aus (11) und (12) folgt für $\vartheta' = 90^\circ$, d. h. $A = 0,5$

$$\frac{d\Phi_{e-e}^{VF}(\vartheta' = 90^\circ)}{d\Phi_M(\vartheta' = 90^\circ)} = \left[\int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda) d\lambda}{m^2 c^4 (\gamma - 1) + \lambda^2} \right]^2. \quad (16)$$

Mit $E_1^0 - mc^2 = 6,1$ MeV (also $\gamma = 12,96$) und $\vartheta' = 90^\circ$ berechnet man aus (9) (für $m_1 = m_2 = m$) und (12) den Wirkungsquerschnitt bezogen auf den räumlichen Einheitswinkel

$$\Phi_M(\vartheta' = 90^\circ) = 2,326 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (17)$$

pro Steradian und Elektron, während der Mittelwert aus den Messungen ergibt

$$\Phi_{e-e}^{\text{exp}}(\vartheta' = 90^\circ) = (2,13 \pm 0,043) \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (18)$$

pro Steradian und Elektron, d. h. einen um ungefähr 8,5% kleineren Wert. Wie wir später noch genauer erörtern werden, beträgt der Einfluß der nächsthöheren Näherung der Quantenelektrodynamik mit und ohne Ausstrahlung in diesem Falle nach Redhead¹² etwa 3,5%, so daß wir hier eine Abweichung von 5% zu betrachten haben.

Für die Energie-Impuls-Übertragung $\sqrt{|k_\mu^2|}$ gilt allgemein

$$k_\mu^2 = 2 m^2 c^4 (\gamma - 1) A, \quad (19)$$

also in unserem Falle ($\vartheta' = 90^\circ$, d. h. $A = 0,5$, $\gamma = 12,96$) $k_\mu^2 = 11,96 m^2 c^4$. Nach der früher angegebenen Bedingung $|k_\mu^2| \ll \lambda_w^2$ für die Übereinstimmung mit der unveränderten Quantenelektrodynamik hat man deshalb λ_w in der Größenordnung

$\lambda_w \approx 30 mc^2$ oder $r_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$ zu erwarten, wenn bei dem vorliegenden Experiment (Fehlergrenzen etwa $\pm 2\%$) eine Abweichung gerade merklich werden soll. Dabei ist die Funktion $G(\lambda)$ noch ganz beliebig. Genaueres läßt sich natürlich nur aussagen, wenn $G(\lambda)$ spezialisiert wird.

Setzt man $G(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$, benutzt also die Bopp-Podolsky-Spezialisierung, so kann man (16) nach $\lambda_0 = \lambda_w$ auflösen und erhält

$$\lambda_0 = mc^2 \sqrt{\frac{\gamma - 1}{[\Phi_M(90^\circ)/\Phi_{e-e}^{\text{BP}}(90^\circ)]^{1/2} - 1}}. \quad (20)$$

Wird hier für Φ_{e-e}^{BP} der in der Arbeit von Barber, Becker und Chu angegebene experimentelle Wert (18) abzüglich der Strahlungskorrekturen eingetragen, dann erhält man mit (17) $\lambda_0 = 23,1 mc^2$ oder $r_0 = \hbar c/\lambda_0 = 5,93 \cdot e^2/(mc^2) = 1,67 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$. Benutzt man die Feynmansche Spezialisierung von $G(\lambda)$, so erhält man für die Verhältnisse bei Barber, Becker und Chu $\lambda_w \approx 40 mc^2$, d. h. $r_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$, also einen Wert, der innerhalb der experimentellen Genauigkeit mit den vorhergehenden übereinstimmt.

Bei dieser Erklärung der Unterschiede zwischen Theorie und Experiment scheint also aus der heutigen Erfahrung ein „Elektronenradius“ r_0 von der Größenordnung

$$r_0 \approx 1 \text{ bis } 2 \cdot 10^{-12} \text{ cm} \quad (21)$$

zu folgen. Genauere Angaben sind auf Grund des gegenwärtigen experimentellen Materials nicht möglich.

Versuchsweise wollen wir nun noch feststellen, was wir bei der Benutzung der Compton-Wellenlänge $r_c = \hbar/(mc)$ als „Elektronenradius“ in unserem Sinne erhalten hätten. Die Compton-Wellenlänge ist ja verschiedentlich als Elektronenradius diskutiert worden⁹. Dann ist $\lambda_w = \hbar c/r_c = mc^2$. Da die Energie-Impuls-Übertragung bei Barber, Becker und Chu $\sqrt{|k_\mu^2|} = 3,46 mc^2$ beträgt, ist also $|k_\mu^2| > \lambda_w^2$, d. h. es sollte dann eine starke Abweichung zu beobachten sein. Für die Bopp-Podolsky-Spezialisierung ergibt sich z. B.

$$\Phi_{e-e}^{\text{BP}}(\vartheta' = 90^\circ) = \Phi_M(\vartheta' = 90^\circ)/\gamma^2, \quad (22)$$

d. h. im vorliegenden Fall mit $\gamma = 12,96$

$$\Phi_{e-e}^{\text{BP}}(\vartheta' = 90^\circ) \approx \Phi_M(\vartheta' = 90^\circ)/168$$

und bei der Feynmanschen Spezialisierung

$$\Phi_{e-e}^{\text{F}}(\vartheta' = 90^\circ) \approx \Phi_M(\vartheta' = 90^\circ)/120.$$

Der Wirkungsquerschnitt fällt mithin bei dieser Wahl von λ_0 mehr als 100-mal zu klein aus. Wird dagegen $\lambda_0 = (\hbar c/e^2) mc^2 \approx 137 mc^2$ gesetzt, also eine

¹² M. L. G. Redhead, Proc. Roy. Soc., Lond. A **220**, 219 [1953].

Abänderung im Gebiet des klassischen Elektronenradius $r_0 = e^2/(mc^2)$ betrachtet, dann gilt für die Experimente von Barber, Becker und Chu $|k_\mu|^2 \ll \lambda_w^2$. Wir haben jetzt keine merkliche Abweichung zu erwarten. Im einzelnen folgt aus der Bopp-Podolsky-Spezialisierung

$$\Phi_{e-e}^{\text{BP}}(\vartheta' = 90^\circ) \approx \Phi_M(\vartheta' = 90^\circ)/1,00127$$

und aus der Feynman-Spezialisierung

$$\Phi_{e-e}^{\text{F}}(\vartheta' = 90^\circ) \approx \Phi_M(\vartheta' = 90^\circ)/1,008,$$

d. h. praktisch dasselbe wie die Möllersche Formel. Eine Abänderung im Bereich der Compton-Wellenlänge reduziert nach (22) den Wirkungsquerschnitt viel zu stark. Die Compton-Wellenlänge wird deshalb schon durch diese Messungen ausgeschlossen. Dagegen erreicht eine Abänderung der Theorie im Bereich des klassischen Elektronenradius keinen merklichen Effekt¹³.

Bevor wir die theoretischen Konsequenzen von (21) diskutieren, wollen wir noch untersuchen, wie dieser Wert mit dem übrigen Erfahrungsmaterial übereinstimmt. Die älteren Experimente über die Elektron-Elektron-Streuung haben durchweg eine zu geringe Genauigkeit, um Abweichungen, die weniger als 10% des Möllerschen Wertes ausmachen, zu erkennen. Außerdem sind die benutzten Anfangsenergien meist zu klein, um bei unserer Größe von r_0 überhaupt einen merklichen Effekt zu erzielen. Für die wesentlichen λ haben wir $\lambda_w \approx 30 mc^2$ gefunden. Außerdem gilt nach (19) $|k_\mu|^2 = 2 m^2 c^4 (\gamma - 1) A$. Daraus geht unmittelbar hervor, daß bei der jetzigen Wahl von r_0 im Bereich der Deutschmannschen Messungen³ praktisch kein Unterschied zwischen der Möllerschen Formel und unseren Ergebnissen besteht, da dort der Bruchteil A der übertragenen Energie gleich 10^{-4} bis 10^{-3} ist. (Mit $\gamma \approx 4 \cdot 10^2$ erhält man nämlich für $|k_\mu|^2$ höchstens etwa $1/8 m^2 c^4$, d. h. $|k_\mu|^2 \ll \lambda_w^2$.) Auch für die Untersuchung von Groetzinger, Leder, Ribe und Berger³ liefert unsere Theorie keine im Rahmen dieses Experiments merkliche Abweichung, weil die kinetischen Energien der Primärelektronen sehr klein sind (zwischen 0,05 und 1,7 MeV), so daß γ zwischen 1,1 und 4,3 bleibt. Für $\vartheta' = 90^\circ$, also $A = 0,5$, wird $|k_\mu|^2$ in diesem Falle höchstens gleich $3,3 m^2 c^4$. Eine solche Abweichung ist infolge des beträchtlichen experimentellen Fehlers nicht zu bemerken. Die Arbeit von Ulmer³

bringt Relativmessungen bei 0,207 und 0,296 MeV kinetischer Energie der einfallenden Elektronen (somit für $\gamma = 1,4$ bzw. 1,58). Aus denselben Gründen haben wir auch bei den Untersuchungen von Page³ sowie Ashkin, Page und Woodward³ keine Abweichungen zu erwarten ($\gamma \approx 1,2$ bis 3,3 bzw. 1,2 bis 2). Die Möllersche Formel wurde hier innerhalb des experimentellen Fehlers von 10% bzw. 7% bestätigt.

2. Vergleich mit den Experimenten über die Positron-Elektron-Streuung

Es sollen nun die Experimente zur Positron-Elektron-Streuung mit unseren Ergebnissen verglichen werden. Auch hier liegen eine Reihe neuerer Arbeiten vor. Die meisten sind jedoch mit sehr geringer kinetischer Energie des einfallenden Positrons durchgeführt worden. Ashkin und Woodward⁴ fanden bei 0,6 MeV und $A = 0,5$ Werte, die um etwa 6% kleiner sind als diejenigen aus der Bhabhaschen Formel. Der Quotient aus Elektron-Elektron- und Positron-Elektron-Streuung stimmt dagegen mit demjenigen aus der Möllerschen und Bhabhaschen Formel überein. Dieses Verhalten entspricht qualitativ ganz unserer Erwartung. Doch quantitativ ist der Unterschied zwischen dem Bhabhaschen Wirkungsquerschnitt und unseren Ausdrücken bei der Wahl (21) von r_0 in dem überprüften Energiebereich viel zu klein ($|k_\mu|^2 = 0,2 m^2 c^4$), um die experimentell festgestellte Differenz erklären zu können. Diese muß andere Ursachen haben. (Die Autoren vermuten Vielfachstreuung.) Auch Ritter, Liesegang, Maier-Leibnitz, Papkow, Schmeiser und Bothe⁴ haben mit Einfallsennergien des Positrons zwischen 0,1 und 0,4 MeV gearbeitet. Mithin können wir für unsere Zwecke dort keine Abweichung erwarten. Die Verfasser fanden Übereinstimmung mit der Bhabhaschen Formel innerhalb der Fehlergrenzen. Entsprechendes gilt für Hoke⁴, Roy und Groven⁴ sowie Howe und MacKenzie⁴, die die Positron-Elektron-Streuung bzw. zwischen 0,02 und 0,6 MeV, 0,5 und 1,1 MeV und bei 1,3 MeV gemessen haben.

Bei hohen Energien (etwa 200 MeV) ist die Positron-Elektron-Streuung kürzlich von Barkas, Deutsch, Gilbert und Violet⁴ mit Hilfe photographischer Platten untersucht worden. Die Arbeit wurde zunächst als Elektron-Elektron-Streuexperiment geplant; doch zeigte es sich nachträglich,

¹³ H. Salecker, Z. Naturforschg. 8a, 16 [1953].

daß durch ein Versehen Positronen als Primärteilchen benutzt worden waren. Leider ist der Wirkungsquerschnitt in diesem Gebiet bereits recht klein, weshalb außerordentlich große Spurenlängen durchmustert werden müssen, um eine genügende Genauigkeit zu erhalten. Die Fehlergrenzen sind darum in dem vorliegenden Versuch zu weit, um definierte Werte für r_0 zu liefern. (Für $A=0,1$ ist ein Unsicherheitsfaktor 3, für $A=0,2$ ein Unsicherheitsfaktor 7 vorhanden⁸.)

3. Vergleich mit Experimenten über die μ -Meson-Elektron-Streuung

Wir wollen noch die Streuung ungleicher geladener Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen nach der Quantenelektrodynamik und der verallgemeinerten Theorie mit den Experimenten vergleichen, soweit der Vergleich sinnvoll möglich ist. Das ist z. B. der Fall bei der Streuung von μ -Mesonen an Elektronen. Walker, Hammel, Sinclair und Sorrel¹⁴ berichten über eine vorläufige Untersuchung mit μ -Mesonen der kosmischen Strahlung, die bei größeren Energie-Impuls-Übertragungen deutliche Abweichungen in dem hier erwarteten Sinne erkennen läßt. Der Vergleich mit unserer Theorie im einzelnen zeigt⁸, daß relativ am besten derselbe Wert $r_0 \approx 1$ bis $2 \cdot 10^{-12}$ cm mit diesem Experiment im Einklang steht, der sich auch aus den Versuchen über die Elektron-Elektron-Streuung ergeben hat. Es muß jedoch erwähnt werden, daß die Fehler in der vorliegenden Arbeit recht groß sind; infolgedessen können kaum definitive Schlüsse daraus gezogen werden. In der letzten Zeit ist das Problem noch einmal von Walker¹⁴ mit erhöhter Genauigkeit untersucht worden. Und zwar wurden bei einer mittleren Einfallenergie der μ -Mesonen von $7 \cdot 10^9$ eV Anstoßelektronen bis zu einer Energie von etwa 10^9 eV gemessen, dabei jedoch keine außerhalb der Fehlergrenzen liegenden Abweichungen festgestellt. Allerdings sind die Fehlergrenzen im interessierenden Bereich noch recht weit. Z. B. machen sie bei $A=0,1$ ungefähr einen Faktor 8 aus. Mit (6) und (10) erhält man bei Spezialisierung auf $G(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ analog zu (20) für $\lambda_w = \lambda_0$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2 m_1 m_2 c^4 (\gamma - 1) A}{(d \Phi_{m_1, m_2}^{Q.E.}(A) / d \Phi_{m_1, m_2}^{BP}(A))^{\frac{1}{2}} - 1}} \quad (23)$$

¹⁴ W. D. Walker, J. E. Hammel, R. M. Sinclair u. J. D. Sorrel, Phys. Rev. **83**, 655 [1951]; W. D. Walker, Phys. Rev. **90**, 234 [1953].

und daraus für eine gerade noch innerhalb der eben angegebenen Fehlergrenzen liegende Abweichung $\lambda_0 = 39,1 m c^2$, also $r_0 = 1 \cdot 10^{-12}$ cm. D. h. ein solcher Fehler ist mit einem Radius von etwa $1 \cdot 10^{-12}$ cm durchaus zu vereinbaren. Eine merkliche Strahlungskorrektur ist in diesem Falle nicht zu erwarten, da die Emission von Lichtquanten bei Teilchen der Masse $m_1 = 210 m_2$ ungefähr um den Faktor $(m_2/m_1)^2 = 1/210^2 = 1/(4,4 \cdot 10^4)$ unwahrscheinlicher ist als für Elektronen gleicher Geschwindigkeit (für die sie nur einige Prozent ausmacht). Es ist natürlich keineswegs selbstverständlich, beim μ -Meson denselben Teilchenradius wie beim Elektron anzunehmen. Im Gegenteil ist es nicht unwahrscheinlich, daß bei Teilchen größerer Masse der Teilchenradius kleiner ausfällt, was das Experiment von Walker vielleicht schon anzudeuten scheint. Die übrigen Arbeiten über die μ -Meson-Elektron-Streuung gestatten wegen ihrer geringen Genauigkeit nur, die Compton-Wellenlänge des Elektrons als Radius der Abänderung auszuschließen⁸. Eingehendere Untersuchungen bleiben hier abzuwarten.

III. Diskussion

Bei der Diskussion unserer Ergebnisse ist zunächst die Frage zu besprechen, wie weit andere Ursachen grundsätzlicher Art die beobachteten Abweichungen veranlaßt haben könnten. Die Möllersche und die Bhabhasche Formel sind durch Störungsrechnung gewonnen worden und stellen die niedrigste Näherung dar, die zu den betrachteten Prozessen beiträgt. Wenn hierbei Abweichungen zwischen Theorie und Experiment festgestellt werden, ist es wohl am naheliegendsten, nach dem Einfluß der höheren Näherungen zu fragen. Die Matrixelemente von Möller und Bhabha, die in (1) zusammengefaßt worden sind, geben den Einfluß der Wechselwirkung proportional zu e^2 wieder. Die nächste Näherung, die auch einen Beitrag zu den betrachteten Streuprozessen liefert, besitzt ein Matrixelement $\sim e^4$. Im Wirkungsquerschnitt tritt dann ein Glied $\sim e^6$ auf (durch Faltung mit dem Möllerschen Matrixelement). Diese Beiträge sind bereits genauer untersucht worden^{8, 12}. Dabei hat sich ergeben, daß sie in den hier untersuchten Energiebereichen weniger als 1% der Möllerschen Näherung ausmachen.

Es besteht aber noch eine andere Möglichkeit für die Streuung zweier geladener Teilchen, nämlich die Streuung mit Ausstrahlung, während wir

bisher nur die rein elastische Streuung in den verschiedenen Theorien diskutiert haben. In der klassischen Elektrodynamik strahlt jede Ladung, die irgendwie beschleunigt wird, einen bestimmten Energiebetrag ab; bei der Streuung zweier geladener Teilchen wird also immer Strahlung emittiert. In der Quantentheorie besteht in solchen Fällen bekanntlich ganz allgemein eine gewisse Ausstrahlungswahrscheinlichkeit, die auch bei uns nicht verschwindet. Das betreffende Matrixelement ist proportional zu e^3 , d. h. der zugehörige Wirkungsquerschnitt $\sim e^6$. Nach Integration über alle verfügbaren Quantenenergien und -winkel stellt er die Häufigkeit für die Streuung der beiden Teilchen dar, wobei irgendein Bruchteil der verfügbaren Energie irgendwohin ausgestrahlt wird. Eine mögliche Lichtquantenemission wurde bei den besprochenen Experimenten nicht weiter beachtet. Es sollte deshalb der eben erwähnte nichtelastische Beitrag stets berücksichtigt werden. Auch unabhängig von diesem experimentellen Argument besitzen die beiden Wirkungsquerschnitte proportional zu e^6 nur zusammen physikalische Bedeutung, da sie getrennt eine Infrarotkatastrophe zeigen. (Die auftretenden Integrationen über die Quantenenergien divergieren an der unteren Grenze.) Barber, Becker und Chu haben mit Hilfe von Zählrohren in Koinzidenzschaltung gemessen. Sie konnten deshalb Stöße, bei denen ein merklicher Betrag der zur Verfügung stehenden Energie abgestrahlt wurde, nicht erfassen. Bei Lichtquantenemission werden ja die Energie- und Winkelbeziehungen des elastischen Stoßes, deren Gültigkeit bei einer Koinzidenzschaltung vorausgesetzt wird, nicht mehr erfüllt. In einigen Versuchen von Barber, Becker und Chu wurde nun die konjugierte Apertur vergrößert. Dann konnten auch noch solche Elektronen mitgezählt werden, die eine Energie bis 0,1 MeV durch Quantenemission verloren hatten. Trotzdem ergaben sich bei gleicher definierender Apertur Beträge, die um 11,6%, 7,1% und 7,3% niedriger ausfielen, als die Møllersche Formel verlangt.

In Strenge muß man diesen Sachverhalt folgendermaßen darstellen. Sei etwa $d\Phi_0(\vartheta)$ der Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung von Elektronen an Elektronen (mit Einschluß der höheren Näherungen) und $d\Phi_{\text{str}}(\vartheta, k)$ der Wirkungsquerschnitt für die Streuung zweier Elektronen aneinander mit einer Energieausstrahlung $\leq k$ (ebenfalls mit Einschluß höherer Näherungen), so

ist der wirklich beobachtbare Wirkungsquerschnitt $d\Phi = d\Phi_0(\vartheta) + d\Phi_{\text{str}}(\vartheta, k)$. Wegen der endlichen Meßgenauigkeit der Energien und Winkel nach dem Stoß ist es nämlich praktisch nicht möglich, $k=0$ zu setzen, d. h. den streng elastischen Wirkungsquerschnitt zu messen. Zum Vergleich mit den zuletzt genannten Meßreihen von Barber, Becker und Chu hat man z. B. $k=0,1$ MeV zu setzen. Ähnliches gilt für Scott, Hanson und Lyman, die um 7% zu niedrige Werte gefunden haben. Dort wurde das Impulsspektrum der gestreuten Elektronen für verschiedene Streuwinkel gemessen; es zeigt zwei Spitzen, von denen eine zur Elektron-Elektron- und die andere zur Elektron-Kern-Streuung gehört. Die relativistischen Erhaltungssätze sind dabei innerhalb $\pm 0,4\%$ bestätigt worden. Diese Angabe bezieht sich aber nur auf das Maximum der zur Elektron-Elektron-Streuung gehörenden Erhebung im Impulsspektrum. Im Gegensatz zur Elektron-Kern-Streuung ist diese Erhebung recht breit mit einer Energieunschärfe von ungefähr 0,4 MeV nach beiden Seiten. Hier ist also $k=0,4$ MeV zu setzen.

Die Elektron-Elektron-Streuung mit Ausstrahlung ist ebenfalls von Redhead¹² berechnet worden. Allerdings hat sich Redhead dabei auf $k \ll mc^2$, d. h. auf die Ausstrahlung von Quanten geringer Energie beschränkt. Diese Bedingung ist bei Barber, Becker und Chu angenähert ($k=0,1$ MeV), bei Scott, Hanson und Lyman dagegen nicht erfüllt ($k=0,4$ MeV). Für die Experimente von Barber, Becker und Chu erhält man mit Hilfe der Redheadschen Rechnung für die gesamte Korrektur $\sim e^6$ etwa $-3,5\%$ der niedrigsten Näherung. Bei genauerer Rechnung (d. h. ohne die Beschränkung $k \ll mc^2$) würde dieser Wert noch etwas kleiner ausfallen. (Die noch höheren Näherungen werden wegen der Kleinheit des Kopplungsparameters $e^2/\hbar c = 1/137$ um einen entsprechenden Faktor kleiner sein.) Man sieht also, daß weniger als die Hälfte der experimentell festgestellten Abweichung durch die Strahlungskorrektur mit und ohne Ausstrahlung geliefert wird. Diesen Betrag haben wir bei der Berechnung des Elektronenradius r_0 im Abschnitt II bereits abgezogen. Der größere Teil der beobachteten Abweichung kann also nicht auf die Korrekturen höherer Näherung zurückgeführt werden.

Außerdem könnte man noch an einen Einfluß der atomaren Bindung der streuenden Elektronen denken. Wir haben ja ebenso wie Møller und Bha-

bha nur die Streuung an freien Teilchen betrachtet. Dieser Einfluß spielt jedoch bei den von Barber, Becker und Chu sowie Scott, Hanson und Lyman benutzten Energie (6,1 und 15,7 MeV) und der starken Ablenkung ($\theta' = 90^\circ$ bzw. 70° bis 150°) keine merkliche Rolle, da die Primärenergie und die kleinsten nach dem Stoß vorkommenden Elektronenenergien groß sind gegenüber der Bindungsenergie der am stärksten gebundenen Atomelektronen, d. h. gegenüber der Bindungsenergie der K-Elektronen des betreffenden Streuers.

Der zur Erklärung der Experimente nötige Wert des „Elektronenradius“ $r_0 \approx 1$ bis $2 \cdot 10^{-12}$ cm erscheint überraschend groß etwa im Vergleich zu der „Ausdehnung“ der schweren Teilchen, die im Bereich des klassischen Elektronenradius liegt, auch wenn man bedenkt, daß experimentelle Fehler unsern Wert noch verkleinern können. Allerdings scheint es nicht ausgeschlossen, daß bei Teilchen größerer Maße der „Teilchenradius“ kleiner ausfällt, also z.B. bei einer ausgedehnten Ladungsverteilung diese mit größerer Teilchenmasse konzentrierter wird (vgl. die entsprechende Bemerkung bei der Besprechung der μ -Meson-Elektron-Streuung). Außerdem sollte eine Abänderung der Elektrodynamik im Bereich 10^{-12} cm, wie eine leichte Rechnung mit dem zugehörigen abgeänderten statischen Potential zu zeigen scheint, bereits einen merklichen Einfluß auf die Lambsche Verschiebung bei der Feinstruktur des Wasserstoffs ausüben, die sehr genau gemessen ist und bei welcher der Unterschied zwischen Theorie und Experiment nur $0,6 \cdot 10^6$ Hz ausmacht. Bei der Berechnung der Lambschen Verschiebung im Rahmen der hier behandelten verallgemeinerten Elektrodynamik darf man sich jedoch nicht nur auf den (leicht auszurechnenden) Einfluß des abgeänderten statischen Potentials beschränken, sondern man muß auch die dynamischen Bestandteile (die das eigentliche Analogon zur Lambschen Verschiebung in der unveränderten Quantenelektrodynamik bilden) berücksichtigen. Eine qualitative Abschätzung⁸ zeigt dabei, daß ein Teil der Beiträge (ebenso wie der Beitrag der Vakuumpolarisation in der unveränderten Quantenelektrodynamik) negativ ausfällt und daß sich auf diese Weise der größte Teil der (an sich schon recht kleinen) Linienverschiebung aus der Abänderung der Elektrodynamik weghebt. Entsprechendes gilt auch für das zusätzliche magnetische Moment des Elektrons in der verallgemeinerten Theorie⁸. Die hier betrachtete

Modifikation beeinflusst übrigens nur die Wechselwirkung mit geladenen Teilchen, da die Elementarladung entsprechend wie in der unveränderten Elektrodynamik als Kopplungsparameter auftritt. Deshalb wird z.B. die (mesonische) Elektron-Neutron-Wechselwirkung durch unsere Abänderungen nicht betroffen.

Auch mit Hilfe rein theoretischer grundsätzlicher Überlegungen ist verschiedentlich versucht worden, die Grenze festzulegen, bis zu der die heutige Quantenelektrodynamik vernünftigerweise gültig sein kann. Betrachtet man dabei die Größe der Wechselwirkung als Kriterium, so folgt, daß Abweichungen von der Quantenelektrodynamik zu erwarten sind, wenn die Teilchen einander näher als

$$\sqrt{\frac{e^2}{\hbar c m c}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{e^2} \frac{e^2}{m c^2}} \approx 3 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$$

kommen¹⁵. Das stimmt gerade mit unseren aus experimentellen Ergebnissen gezogenen Folgerungen überein. (Übrigens verliert danach die Einteilchentheorie ihre Gültigkeit bereits, wenn Abstände unterhalb der Compton-Wellenlänge wesentlich werden.)

Zusammenfassend können wir feststellen, daß eine Abänderung der Quantenelektrodynamik im Bereich der Compton-Wellenlänge auf Grund der heute vorliegenden Experimente auszuschließen ist. Diese Folgerung ist unabhängig von der speziellen Form der benutzten Modifikation, da ein „Elektronenradius“ von dieser Größe eine viel zu starke Reduktion ergibt (bei den betrachteten Energien um mehr als zwei Größenordnungen). Darüber hinaus verlangen die genauesten gegenwärtig bei der Elektron-Elektron-Streuung vorhandenen Experimente eine Abänderung der Quantenelektrodynamik in der Gegend von etwa 1 bis $2 \cdot 10^{-12}$ cm. Doch ist die Genauigkeit der Experimente noch nicht groß genug, um mehr ins einzelne gehende Schlüsse zu ziehen. Bei einer Abänderung im Gebiet des klassischen Elektronenradius erhalten wir in den heute untersuchten Energiebereichen keine beobachtbaren Abweichungen von der unveränderten Quantenelektrodynamik, wie bereits in einer früheren Notiz¹³ mitgeteilt worden ist.

Herrn Prof. Dr. F. Bopp (München) sowie den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Elementarteilchen auf der internationalen Konferenz über theoretische Physik in Kyoto und Tokyo danke ich für aufschlußreiche Diskussionen über den hier behandelten Gegenstand.

¹⁵ Vgl. z.B. H. C. Corben, *Physics Today* **7**, Nr. 3, S. 10 [1954].